U.S.T.H.B
Faculté des Mathématiques
1ère année Licence
SM et ST

Les Matrices

Coordination SM-ST du module
MATH II
Année universitaire 2019-2020

1 Définitions et généralités

Définition 1. *Une matrice est un tableau rectangulaire de nombres (réels ou complexes) disposés en lignes et colonnes. Pour* n, $m \in \mathbb{N}^*$, *on a*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

✓ *A est une matrice du type $n \times m$ contenant n lignes et m colonnes.*

✓ *On note par $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n \\ 1\le j\le m}}$ ou tout simplement $A = (a_{ij})_{n\times m}$.*

✓ *a_{ij} sont les coefficients de la matrice A, ce sont des nombres réels ou complexes.*

✓ *Pour tout coefficient a_{ij} ; i est l'indice des lignes et j l'indice des colonnes.*

✓ *On note $\mathcal{M}_{n,m}(K)$, l'ensemble des matrices du type $n \times m$ à coefficients dans le corps K ($K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$).*

Exemple 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 10 & 0 & 7 \\ 2 & -1 & 9 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 5 \\ -1 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

A est du type 2×2, B est du type 3×3 et C est du type 3×4.
Par exemple les coefficient $a_{21} = 2$, $b_{23} = 7$, $c_{14} = 5$.

2 Quelques matrices particulières

- Une matrice A du type $n \times m$ est dite nulle si $\forall i, j$, on a $a_{ij} = 0$, et on note par $A = 0_{n\times m}$ ou tout simplement $A = 0$.
- Si $n = 1$ et m quelconque, on parle de matrice ligne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \end{pmatrix}.$$

- Si $m = 1$ et n quelconque, on parle de matrice colonne.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

- Si $n = m$, la matrice est dite carrée d'ordre n.
  Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n, on distingue quelques formes
  1. Si pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$ et $j \in \{1, \cdots, n\}$ avec $i \neq j$, on a $a_{ij} = 0$, la matrice est dite diagonale et on a
  $$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$
  Une matrice particulière des matrices diagonales est la matrice identité d'ordre n, notée I_n et donnée par
  $$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$
  2. Une matrice triangulaire inférieure, si $a_{ij} = 0$, pour tout $i < j$.
  $$N = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$
  3. Une matrice est triangulaire supérieure si $a_{ij} = 0$ pour tout $i > j$.
  $$K = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

3 Opérations sur les matrices

3.1 Égalité des matrices

Deux matrices $A = (a_{ij})_{n\times m}$ et $B = (b_{ij})_{n\times m}$ sont égales, on note $A = B$, si :

1. elles ont le même nombre de lignes
2. elles ont le même nombre de colonnes
3. pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $j \in \{1, \dots, m\}$ on a : $a_{ij} = b_{ij}$, c'est-à-dire les coefficients des deux matrices sont égaux.

3.2 Transposée d'une matrice

Définition 2. *Soit $A = (a_{ij})_{n\times m}$ une matrice du type $n \times m$. La transposée de A notée ${}^tA$ est la matrice à m lignes et n colonnes définie par*

$$\boxed{{}^tA = (a_{ji})_{m\times n}}$$

Autrement dit les colonnes de ${}^tA$ sont les lignes de A et les lignes de ${}^tA$ sont les colonnes de A.

Exemple 2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 11 & 5 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 11 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \qquad {}^tN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

3.3 Somme

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ deux matrices du même type $n \times m$. La somme des matrices A et B, notée $A+B$, est la matrice C du type $n \times m$ dont les coefficients sont égaux à la somme des coefficients de A et B. Autrement dit $C = A + B = (c_{ij})$ où,

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \qquad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, m\}}.$$

Exemple 3. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 5 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3 & 5+1 & 7+1 \\ 3+1 & 6+2 & 5+1 \\ 1+3 & 3+2 & 3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 8 \\ 4 & 8 & 6 \\ 4 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Proposition 1. ***(Propriétés)*** *Soient A, B et C trois matrices du même type $n \times m$. Alors,*

1. $A + B = B + A$.
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$.
3. ${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$.

3.4 Multipication par un scalaire

Soit $A = (a_{ij})$ une matrice du type $n \times m$ et λ un sclaire (dans $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$). On désigne par λA la matrice du type $n \times m$ dont les coefficients sont obtenus par le produit des coefficients de A par λ.

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \ldots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \ldots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \ldots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Exemple 4. *Soient* $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$ *et* $\lambda = 3$. *Alors*

$$3M = \begin{pmatrix} 3.3 & 3.2 & 3.1 \\ 3.2 & 3.1 & 3.6 \\ 3.1 & 3.5 & 3.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 18 \\ 3 & 15 & 12 \end{pmatrix}.$$

3.5 Produit de deux matrices

3.5.1 Cas simple : Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Soit A une matrice ligne du type $1 \times m$ et B une matrice colonne du type $m \times 1$, alors le produit $A \times B = C$ est une matrice du type 1×1 constituée par un seul coefficient c_{11} et donnée par

$$\boxed{\mathrm{C} = \mathrm{A} \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} = (a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1m}b_{m1}) = (c_{11})}.$$

3.5.2 Cas général

Soit $A = (a_{ij})_{n\times m}$ une matrice à n lignes et m colonnes et soit $B = (b_{ij})_{m\times p}$ une matrice à m lignes et p colonnes. Le produit $A \times B$ est la matrice à n lignes et p colonnes dont le coefficient c_{ij} est donné par

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} \cdot b_{kj}}.$$

C'est-à-dire, le coefficient c_{ij} s'obtient par le produit de la i-ème ligne de la matrice A et la j-ème colonne de la matrice B.

$$c_{ij} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{mj} \end{pmatrix}.$$

Exemple 5. *Soient* $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. *$M$ est du type 2×3 et N est du type 3×2, le produit $M \times N$ est défini et la matrice $M \times N$ est du type 2×2. On a*

$$\begin{aligned} M \times N = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (2\times1+1\times3+2\times2) & (2\times2+1\times1+2\times1) \\ (2\times1+3\times3+4\times2) & (2\times2+3\times1+4\times1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 19 & 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Remarques :

1. Le produit de deux matrices A et B est défini si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.
2. Le produit matriciel **n'est pas commutatif**
   Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.
   $$A \times B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix};$$
   $$B \times A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 29 & -2 \end{pmatrix}.$$
3. Soient A, B et C trois matrices, Si $AB = AC$, on ne peut pas simplifier par A pour en déduire que $B = C$.
4. Si $A \times B = 0_{n\times m}$, on ne peut pas en déduire que soit $A = 0_{n\times m}$ ou bien $B = 0_{n\times m}$.

Proposition 2. ***(Propriétés)***
Soient A, B et C trois matrices dont les produits ci-dessous sont définis, on a :

1. *Associativité :* $\boxed{(A \times B) \times C = A \times (B \times C)}$.
2. *Distributivité par rapport à l'addition :* $\boxed{(A + B) \times C = A \times C + B \times C}$ *et* $\boxed{A \times (B + C) = A \times B + A \times C}$.
3. $\boxed{(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B)}$.
4. *Si A est une matrice du type $n \times m$ alors* $\boxed{A \times I_m = A}$ *et* $\boxed{I_n \times A = A}$.
5. $\boxed{{}^t(A \times B) = {}^t B \times {}^t A}$.

Remarque
On note en général, le produit de deux matrices par $\boxed{A \times B = AB}$.

4 Puissances d'une matrice carrée

Définition 3. *Soit $A = (a_{ij})$ une matrice carrée d'ordre n. La puissance n-ième de la matrice A est définie par :* $A^0 = I_n$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{(n\, fois)}$.

Exemple 6. *Considérons la matrice suivante :*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculons A^3. D'après la définition on a : $A^3 = A \times A \times A = A^2 \times A$ donc on calcule d'abord A^2

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on calcule A^3,

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 18 & 16 & 18 \end{pmatrix}.$$

Proposition 3. *Soient A, B deux matrices carrées de même ordre, $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :*

1. $A^{k+l} = A^k A^l$.
2. $(AB)^k \neq A^k B^k$.
3. $(\lambda A)^k = \lambda^k A^k$.
4. $(\lambda A) \times B = A \times (\lambda B) = \lambda(A \times B)$.

Théorème 1 (Formule du binôme de Newton)**.** *Soient A et B deux matrices qui commutent, c'est-à-dire $AB = BA$. Alors*

$$\boxed{(A+B)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} A^i B^{n-i}},$$

où

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$$

Remarque :

Plusieurs techniques existent pour le calcul de la puissance n^{ime} d'une matrice carrée A^n :

1. Trouver une relation en fonction de n dans le calcul des premières puissances de A et puis démontrer par récurrence le résultat.

   Exemple 7.

   $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$$

   On démontre alors par récurrence que pour tout $n \geq 1$, on a $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & -2^{n-1} \\ -2^{n-1} & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

2. En écrivant la matrice comme somme de deux matrices dont les puissances sont simples à calculer.

Exemple 8. *Soit* $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, *on pose* $A = B + I_2$, *avec*

$$B = A - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que $B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $I_2^2 = I_2$. *On obtient donc en développant* A^2, *on trouve* $A^2 = (B + I_2)^2 = 2B + I_2$.
De même, on a $A^3 = A^2 \times A$, *on obtient* $A^3 = 3B + I_2$. *On constate que pour tout* $n \geq 3$, *on a* $A^n = nB + I_2$ *et on démontre cette relation par récurrence. Ce qui donne*

$$A^n = \begin{pmatrix} 3n+1 & 3 \\ -3 & -3n+1 \end{pmatrix}.$$

Remarque :
Le calcul de la puissance d'une matrice diagonale est simple à obtenir.

Exemple 9. *Soit*

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}, \quad \text{par récurrence on obtient ,} \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.1. *On considère les matrices*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. *Calculer* $A + B$,$A - B$, $A \cdot B$, $(3A + B) \cdot C$.
2. *Est-il possible d'effectuer le produit* $C \cdot A$ *? justifier.*
3. *Déterminer la transposée de la matrice* C, *puis calculer* ${}^tC \cdot^t A$ *et* ${}^t(A \cdot C)$.
4. *Calculer* $(A + B)^2$ *et* $A^2 + 2AB + B^2$. *Que peut-on déduire sur* A *et* B *?*
5. *Calculer* B^3, B^4 *et* B^5, *puis déduire* B^n *pour tout* $n \geq 1$.

5 Matrices inverses

Définition 4. *Soit* A *une matrice carrée d'ordre* n. *S'il existe une matrice carrée* B *d'ordre* n *telle que*

$$\boxed{A \times B = B \times A = I_n},$$

alors on dit que la matrice A *est* *inversible*.*La matrice* B *est notée* A^{-1} *et on l'appelle matrice* *inverse de* A.

Exemple 10. *Soit la matrice* $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. *La matrice* $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ *est l'inverse de la matrice* A *car* $A \times B = B \times A = I_2$. *En effet, on a*

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a le résultat suivant

Théorème 2. *Soient* A *et* B *deux matrices carrées de même ordre inversibles. Alors, la matrice produit* AB *est inversible et on a*

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}.$$

Exercice 5.1. *Soit M une matrice carrée vérifiant la relation $M^4 + 3M^3 - 5M + 2I = 0$. Montrer que M est inversible, et exprimer M^{-1} en fonction de M et de ces puissances.*

Réponse

La relation $M^4 + 3M^3 - 5M + 2I = 0$ est équivalente à $-M^4 - 3M^3 + 5M = 2I \quad (1)$.
En mettant en facteur M dans la relation (1), on obtient

$$M\left(-M^3 - 3M^2 + 5I\right) = 2I \Longrightarrow M \times \left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(-M^3 - 3M^2 + 5I\right)}_{N}\right] = I$$

Par définition de la matrice inverse, on déduit que

$$M^{-1} = N = \frac{1}{2}\left(-M^3 - 3M^2 + 5I\right).$$